Sia $f(x): [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$
allora $\exists c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

DIMOSTRAZIONE

Siccome $f(x)$ e' continua in $[a,b]$ per Waistress $\exists$ un M (estremo superiore) e un m (estemo inferiore). Per la proprieta' di sup e inf avremo: $m \leq f(x) \leq M$

Per la proprieta' di monotonia della funzione integrale potremmo scrivere:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

I due integrali agli estremi sono integrali di funzioni costruite quindi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Suppongo $b>a$, divido per $(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

m e M sono gli estremi inf. e sup. per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori compresi tra m e M. Significa

$$\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Porto $(b-a)$ a sinistra e diventa

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$