$\boxed{\text{DEF}}$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice costante a tratti se assume un numero finito e ha al più un numero finito di punti di discontinuità

La proposizione che permette di bypassare i limiti su insiemi diretti è:

$\boxed{\text{PROP}}$ Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile, allora

$$\int_{[a,b]} f\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \sum_{i,\, a\leq \varepsilon i<b}^{+} f(\varepsilon i)$$

LIMITE COME INTEGRALE

Def $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice costante a tratti se assume un numero finito di valori e ha al più un numero finito di punti di discontinuità

La Proposizione che permette di bypassare i limiti se vengono dati è

Prop Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, allora

$$\int_{[a,b]} f \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \sum_{i: a \leq \varepsilon i < b}^{+} f(\varepsilon i)$$

Dim

Si usa l'oss a pagina 9. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $g_1(x)$ una funzione costante a tratti definita su $[a,b]$ tale che

$$(9.1) \quad g_1 \geq f, \quad \int_{[a,b]} g_1 \, dx < \int_{[a,b]} f \, dx + \varepsilon$$

Sia poi $g_2(x)$ una funzione costante a tratti definita su $[a,b]$ tale che

$$(9.2) \quad g_2 \leq f, \quad \int_{[a,b]} g_2 \, dx > \int_{[a,b]} f \, dx - \varepsilon$$

Essendo g_1, g_2 costanti a tratti, per l'oss vale l'oss' a Pag 9:

Dunque $\exists\ \delta > 0$

$$(10.1) \quad \left| \int_{[a,b]} g_1\, dx - s \sum_{i: a \le is < b} g_1(is) \right| < \varepsilon \qquad \forall s \in (0, \delta)$$

$$(10.2) \quad \left| \int_{[a,b]} g_2\, dx - s \sum_{i: a \le is < b} g_2(is) \right| < \varepsilon \qquad \forall s \in (0, \delta)$$

Dalle (9.1), (10.1) si ricava $\forall s \in (0, \delta)$:

$$(10.3) \quad s \sum_{i: a \le is \le b} f(is) \le s \sum_{i: a \le is < b} g_1(is) < \varepsilon + \int_{[a,b]} g_1\, dx$$

e dalle (9.2), (10.2) si ricava $\forall s \in (0, \delta)$:

$$(10.4) \quad s \sum_{i: a \le is < b} f(is) \ge s \sum_{i: a \le is < b} g_2(is) > -\varepsilon + \int_{[a,b]} g_2\, dx$$

Dalle (9.2), (10.3) segue

$$(10.5) \quad s \sum_{i: a \le is < b} f(is) < 2\varepsilon + \int_{[a,b]} f\, dx \qquad \forall s \in (0, \delta)$$

e dalle (9.2) (10.4) segue

$$(10.6) \quad s \sum_{i: a \le is < b} f(is) > -2\varepsilon + \int_{[a,b]} f\, dx \qquad \forall s \in (0, \delta)$$

Dalle (10.5) (10.6) segue

$$\left| \int_{[a,b]} f\, dx - s \sum_{i: a \le is < b} f(is) \right| < 2\varepsilon \qquad \forall s \in (0, \delta)$$

$\boxtimes$