Dim. (teo) Applicando il binomio di newton (lezione 2)

con $a=1$ e $b=\frac{1}{n}$ si ha: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = (*)$$

Di fatto si chiede di studiare

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right)$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

« si intravede la somma parziale n-esima di

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} »$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{\text{Sono } k}}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) = (\#)$$

Poniamo $P_{k,n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$

$$(*) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{ \} \quad \forall k \in \{1, \dots n\} \quad P_{k,n} < 1$

$\Rightarrow (*) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ somma parziale n-esima della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

$$e_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} e_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e < 64/27$$

Dunque la successione (e_n) è superiormente limitata e anzi

$$1 < e_n < e \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Questo non dimostra che (e_n) ammette limite. Però se (e_n) ammette limite tale limite sarà $\leq e$.
Per ora però dalla (16.1) posso solo dire

$$\limsup_{n\to+\infty} e_n \leq e$$

Vediamo che (e_n) è (strettamente) crescente

$$e_n < e_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} \quad (17.1)$$

dove ricordo che

$$P_{k,n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$P_{k,n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

Si vede subito che $P_{k,n} < P_{k,n+1}$. da cui segue la (17.1) (oltretutto il membro destro della (17.1) ha un addendo in più).

Dunque $\exists \lim_{n\to+\infty} e_n \leq e$ resta da dimostrare $\lim_{n\to+\infty} e_n \geq e$