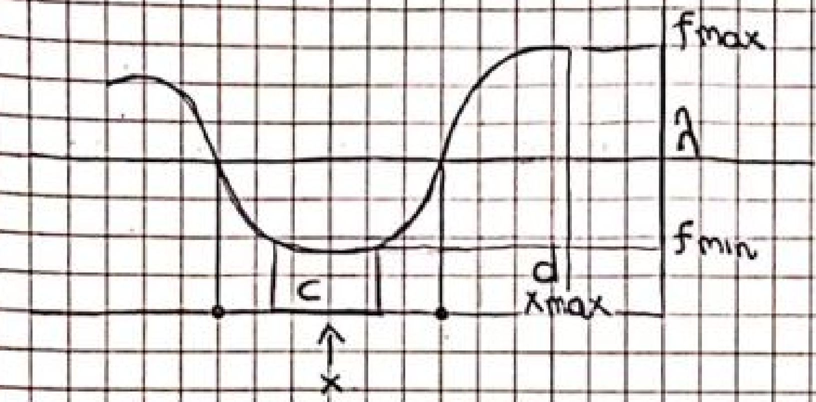
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua allora f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo



DIMOSTRAZIONE

Sia $c \in [a, b]$ $d \in [a, b]$

$$f(c) = \min\{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$f(d) = \max\{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

c, d esistono dal teorema di Weierstrass
Possiamo supporre $c \leq d$; Abbiamo dunque

$$a \leq c \leq d \leq b \qquad (2.1)$$

Vi sono ora due casi:

1) $f(c) = f(d)$
2) $f(c) < f(d)$

1) accade se e solo se f = costante
In tal caso il teo è vero

Possiamo allora metterci nel caso 2) dunque $c \neq d$ e perciò dalla (2.1)

---

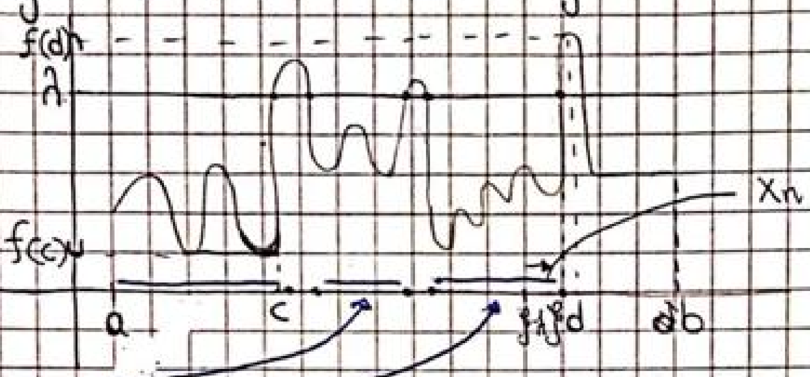
una funzione f continua, definita in un compatto è limitata e ammette max e min abbiamo

$$a \leq c < d \leq b$$

Dobbiamo dimostrare che

$\forall \lambda \in (f(c), f(d))$ $\quad f(c) < \lambda < f(d)$ (3.1)

$\exists \xi \in (c, d) : f(\xi) = \lambda$



$$E := \{ x \in [c, d] : f(x) < \lambda \} \subseteq [a, b]$$

$a \leq \xi := \sup E \leq b \leq +\infty$

? ξ è ben definito ? Si perché $E \neq \emptyset$, $c \in E$ dato che $f(c) < \lambda$

Dico che $f(\xi) = \lambda$ Dimostrerò infatti :

$$f(\xi) \leq \lambda \qquad f(\xi) \geq \lambda$$

Dalla definizione di estremo superiore segue che

$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in E : \xi \geq x_n > \xi - \frac{1}{n}$

cioè

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [c, d] \quad f(x_n) < \lambda \quad x_n > \xi - \frac{1}{n}$

Ho costruito una succ. $(x_n) \subseteq [c, d]$ convergente a ξ. Dato che f è continua in $[a, b]$, dunque anche in ξ per cui:

$$f(x_n) \xrightarrow{n \to +\infty} f(\xi)$$

dalla disuguaglianza $f(x_n) < \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$

passando al limite per $n \to +\infty$, deduco

$$f(\xi) \leq \lambda \quad (*)$$

(le disuguaglianze quando si passa al limite diventano larghe)

Resta da dimostrare che $f(\xi) \geq \lambda$

Dico che $\xi < d$. Infatti dalla (3.1) e (4.1) segue $f(\xi) \leq \lambda < f(d) \Rightarrow f(\xi) < f(d)$

pertanto $\xi < d$

"c'è un pochino di spazio tra ξ e d" più precisamente $(\xi, d] \neq \emptyset$

Uso ancora la continuità di f in ξ in particolare da

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) \quad \text{su } [a,b]$$

$E = [a,b]$

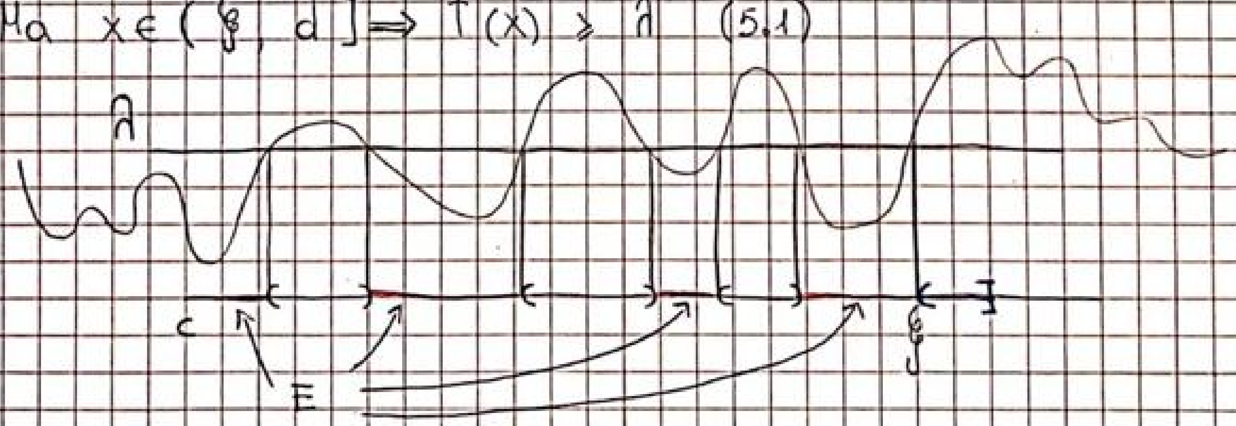
Segue (lemma di restrizione $\xi = \bar{x} \in \bar{E}$, $L = (\xi, d]$)

$\xi \in \bar{L}$

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) \quad \text{su } (\xi, d] = L$$

(non stiamo dicendo altro che il limite destro di f in ξ è $f(\xi)$.) Ma

Ma $x \in (\xi, d] \Rightarrow f(x) \geq \lambda$ (5.1)



Passando al limite destro di f (cioè il limite $(\xi, d]$ nella (5.1) deduco:

$$f(\xi) = \underbrace{\lim_{x \to \xi} f(x)}_{\text{limite pieno}} = \underbrace{\lim_{x \to \xi^+} f(x)}_{\text{limite destro}} \geq \lambda$$