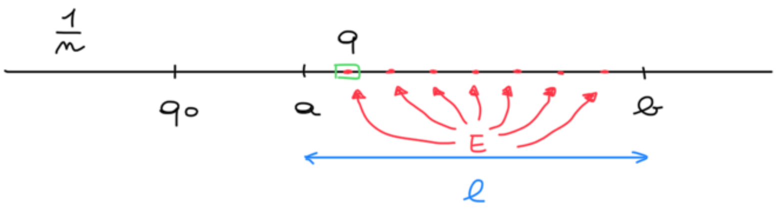
• $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Allora $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.

DIMOSTRAZIONE



Scelgo $q_0 \in \mathbb{Q}$, $q_0 < a$ e posso fare questa scelta perché esistono razionali arbitrariamente piccoli. Sia $\ell = b - a > 0$ quindi la lunghezza del segmento $\overline{AB}$. Scelgo $n \in \mathbb{N} : 1/n < \ell$ e basta che $n > \ell$. Inoltre notare che $1/n \in \mathbb{Q}$.
Definisco $E := \{m \in \mathbb{N} : q_0 + m/n > a\}$, risulta che $E \subseteq \mathbb{N}$ e $E \neq \emptyset$ perché
$\exists m \in \mathbb{N} : q_0 + m/n < a \quad \Rightarrow \quad m/n > a - q_0$
$\Rightarrow m > n(a - q_0)$ e dunque $m \in E$.

Inoltre $\exists!\, \min E =: \bar{m}$ (nel disegno l'indice corrispondente a $\boxed{\bullet}$ è $\bar{m}$).
Definisco $q = q_0 + \bar{m}/n$ e devo dimostrare che q è un numero razionale e $a < q < b$.
Intanto $q = \underbrace{q_0}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\bar{m}/n}_{\in \mathbb{Q}} \Rightarrow q \in \mathbb{Q}$

Dimostriamo che $q > a$. Poiché $\bar{m} = \min E$
$\Rightarrow \bar{m} \in E$ e questo significa $q_0 + \bar{m}/n = q > a$.

Dimostriamo che $q < b$. Poiché $\bar{m} = \min E$
$\Rightarrow \bar{m} - 1 \notin E \quad \Rightarrow \quad q_0 + \dfrac{\bar{m} - 1}{n} \leq a$

$\Rightarrow q_0 + \bar{m}/n - 1/n = q - 1/n \quad \Rightarrow q - 1/n \leq a$

$\Rightarrow q \leq a + 1/n \leq a + \ell = a + b - a = b$