

# UNA SERIE CONVERGENTE ASSOLUTAMENTE È CONVERGENTE

Sia  $(a_n)$  una successione di numeri reali

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$  allora (1.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

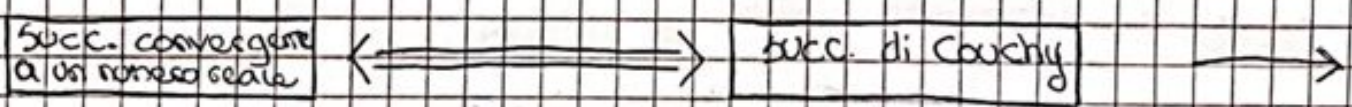
## DIMOSTRAZIONE

Dire che  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$  significa per definizione,

devo dimostrare che  $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \in \mathbb{R}$  dove

$$S_N := \sum_{n=1}^N a_n$$

Ma grazie



$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \in \mathbb{R}$$

Se la  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$  (CONVERGENTE) ~~esiste~~ <sup>se</sup> esiste il limite delle somme parziali ~~è convergente~~ (TERMINI QUALUNQUE)

DEF.

Se ABBIAMO UNA SERIE A TERMINI QUALUNQUE E CONVERGENTE, ALLORA È INFINITESIMA LA SUCCESSIONE

DI CUI FACCIAMO LA SERIE

$$\frac{(-1)^n}{n}$$



applicato alla successione  $(S_n)$  mi basta dimostrare che  $(S_n)$  è di Cauchy

Cioè  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$m, n > \bar{n}_\varepsilon \quad |S_n - S_m| < \varepsilon \quad (2.1)$$

Fisso  $\varepsilon > 0$ , dati due indici  $m, n \in \mathbb{N}$  posso supporre  $n > m$ , dunque  $n = m+k$  con  $k \in \mathbb{N}$

Allora (2.1) equivale

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, k \in \mathbb{N}$

$$m, m+k > \bar{n}_\varepsilon \quad |S_{m+k} - S_m| < \varepsilon$$

$$S_{m+k} - S_m = \sum_{j=1}^{m+k} a_j - \sum_{j=1}^m a_j$$

$$= \sum_{j=m+1}^{m+k} a_j$$

$$\Rightarrow |S_{m+k} - S_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{m+k} a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^{m+k} |a_j|$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} :$

$$\sum_{j=\bar{n}_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon \quad (3.1)$$

Ma allora preso  $\varepsilon > 0$  e preso  $\bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$  dato dalla (3.1), se  $m > \bar{n}_\varepsilon$   $k \in \mathbb{N}$

$$|S_{m+k} - S_m| \leq \sum_{j=m+1}^{m+k} |a_j| \quad (3.1)$$

$$\leq \sum_{j=m+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon$$

