CRITERIO DI LEIBNITZ

Sia (a_n) una successione $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo

1) $a_n \longrightarrow 0$ (per $n \to +\infty$) (infinitesima)

2) $a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ (decrescente)

allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$$

DIMOSTRAZIONE

$$S_M = \sum_{n=1}^{M} (-1)^n a_n$$ (devo dimostrare che S_M converge a un numero reale)

Per dimostrarlo cerco due sottosuccessioni di indici senza indici in comune, la cui unione ricoprirà tutto $\mathbb{N}$

(S_{1°) converge a $l \in \mathbb{R}$

(S_{2°) converge a l

E da questo posso dedurre che (S_M) converge a l.

Divido $\mathbb{N}$ in due famiglie pari e dispari. Vedo cosa succede alle relative somme parziali

$$S_{2N} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + a_{2N}$$

$$S_{2N-1} = -a_1 + a_2 - a_2 + a_4 - \dots - a_{2N-1}$$

$\downarrow$

ES. SERIE CHE CONVERGE MA NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} =$$

Noto che $\forall N \in \mathbb{N}$

$$S_{2N} \qquad\qquad S_{2(N+1)}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$-a_1 + \dots + a_{2N} \qquad -a_1 + \dots + a_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2}$$

$$\overset{\text{ip. (2)}}{0 \geq}$$

$$S_{2(N+1)} = S_{2N} + \underbrace{\quad}_{\leq 0}$$

$$S_{2(N+1)} \leq S_{2N}$$

Dunque (S_{2N}) è decrescente

$$S_{2N-1} \qquad\qquad S_{2(N+1)}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 \qquad -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$$

$$\| \qquad\qquad \geq 0$$

$$-a_1 + a_2 \dots - a_{2N-1} \qquad \|$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 a_{2N+1} + a_{2N} - a_{2N+1}$$

$$\geq 0$$

$$\square + S_{2N-1} = S_{2N+1}$$

$$S_{2N+1} \geq S_{2N-1}$$

Dunque (S_{2N-1}) è crescente

Dal teorema fondamentale delle successione monotone

$$\exists \lim_{N \to +\infty} S_{2N} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \Downarrow$$

$$\exists \lim_{N \to +\infty} S_{2N-1} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \Uparrow$$

Ora voglio far vedere che questi 2 limiti coincidono allo stesso (e sono finiti).

Vediamo che (S_{2N}) è limitata dal basso e (S_{2N-1}) è ~~...~~ limitata dall'alto

$$S_{2N-1} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + a_{2N-2} - a_{2N-1}$$

$$= \underbrace{-a_1 + a_2}_{\geq 0} \underbrace{- a_3 + a_4}_{\geq 0}$$

$$S_{2N} = -a_1 + \underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0}$$

Resta da vedere che $\lim_{n \to +\infty} S_{2N} = \lim_{n \to +\infty} S_{2N-1}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(S_{2N} - S_{2N-1} \right)$ = dato che i limiti esistono e sono finiti

$= \lim_{n \to +\infty} S_{2N} - \lim_{n \to +\infty} S_{2N-1}$

questo limite è la differenza dei limiti

$= \lim_{n \to +\infty} a_{2N} = 0$

la somma dei primi 100 numeri - la somma dei primi 99 numeri = 100

perché (a_n) per ipotesi è infinitesima

Deduco

$$\lim_{N \to +\infty} S_{2N} = \lim S_{2N-1}$$

∎