TEOREMA DI DIRICHLET

Supponiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty$ e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

un riordinamento $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \in \mathbb{R}$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sia $\sigma_N \sum_{n=1}^{N} b_n \quad \forall N \in \mathbb{N}$

certamente $\sigma_N \leq$ qualche somma parziale di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$\sigma_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$
$$= a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + a_{\phi(3)} + a_{\phi(4)} + a_{\phi(5)}$$
$$= a_7 + a_{12} + a_1 + a_3 + a_{45}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{45} a_j = S_{45}^a$$

Siccome per ipotesi $a_n \geq 0$ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

$\rightarrow$ $\sigma \leq$ sup somma parziale di $\sum a_n$

cioè $\sigma \leq \sup_M S_M^a < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \sup_{N \in \mathbb{N}} ~~\sigma_n~~ \sigma_n \leq \sup S_M^a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dunque

$*$ è un riordinamento di $\sum b_n$

Dato che

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sup_N \sigma_N ,$$

otteniamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Scambiando il ruolo di a_n e b_n (poiché se $\sum b_n$ è un riordinamento di $\sum a_n$, anche $\sum a_n$*, essendo ϕ invertibile), si ottiene

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Dunque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

Dobbiamo adesso eliminare l'ipotesi $a_n \geq 0$
supponiamo $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Consideriamo $|a_n| \geq 0$

Naturalmente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ è un riordinamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ che per ipotesi converge. Da quanto dim. nel passo precedente

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+$ è un riordinamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^-$ è un riordinamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n^+ - b_n^-)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^-$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

■